

# Litt enkel matematikk for SOS3003

Erling Berge

31 Aug 2004

© Erling Berge

1

---

---

---

---

---

---

---

---

## Om matematikk

- Matematikk er **ikkje** vanskeleg
- Det er eit språk for logikken.
- Det er lett å lære å lese
- Litt vanskelegare å forstå det ein les og
- Enno litt vanskelegare å skrive
- Den "dialekten" vi brukar her, regresjonsanalyse, er enkel å lese og forstå.

31 Aug 2004

© Erling Berge

2

---

---

---

---

---

---

---

---

## Litt om kva vi treng

- **Algebra**: rekning med "bokstavar", dvs. vilkårlege tal, inklusiv potensar og logaritmar
- **Funksjonar**: prosedyrar for å binde saman verdien av ein type tal (t.d. År med utdanning) med verdien av ein annan type tal (t.d. Inntekt i kroner):  $y=f(x)$
- **Likningar**: påstandar om at to matematiske uttrykk logisk sett er identiske

31 Aug 2004

© Erling Berge

3

---

---

---

---

---

---

---

---

## Algebra (1)

- Latinske bokstavar står for eit vanleg vilkårleg tal:  $a, b, c, \dots$ , inklusive negative tal
- Reknereglar:
  - Addisjon:  $a+b = b+a$
  - Subtraksjon  $a-b = -b+a$
  - Multiplikasjon  $a*b = b*a$
  - Divisjon  $a/b = a*(1/b)$
- Algebraiske uttrykk vert sett saman og ordna ved hjelp av reknereglane og parentesar

31 Aug 2004

© Erling Berge

4

---

---

---

---

---

---

---

---

## Algebra (2)

- Rekning med parentesar: det som står inne i parentesen kan/skal handsamast som eitt tal. Sett  $b+c = t$ , da er anten
$$a*(b+c) = a*t \quad \text{eller}$$
$$a*(b+c) = a*b + a*c$$

$$(a+b)*(c+d) = a*(c+d) + b*(c+d)$$
$$= a*c+a*d+b*c+b*d$$

31 Aug 2004

© Erling Berge

5

---

---

---

---

---

---

---

---

## Algebra (3) Potensar

- Potensar:
$$a*a = a^2$$
$$a^2*a = a^3$$
osv.
$$a*a*a*a \dots *a \text{ (n gonger) } = a^n$$
- $a^0 = 1$  ; pr definisjon for alle  $a \neq 0$
- $a^{-n} = 1/a^n$  ; pr definisjon
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$  ; [ n-te rota av a ]

31 Aug 2004

© Erling Berge

6

---

---

---

---

---

---

---

---

## Reknereglar for potensar

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m / a^n = a^{m-n}$
- $(a/b)^n = a^n / b^n$
  
- Potensar vil i somme samanhengar bli kalla eksponentar, og potensering heiter da eksponentiering

31 Aug 2004

© Erling Berge

7

---

---

---

---

---

---

---

---

## Funksjonar (1)

- Ein funksjon er ei samling prosedyrar som fortel kva for utfall (eitt eller fleire tal) som høyrer saman med ein gitt input (eitt eller fleire tal). Prosedyresamlinga kan kallast  $f(x)$ , av og til  $g(x)$ , der " $x$ " står for eit eller anna algebraisk uttrykk
- T.d. til ein gitt  $x$  som input svarar ein bestemt  $y$  (eller  $f(x)$ ) som utfall
- Med berre ein input storleik og ein utfallstorleik vil samanhengen kunne framstillast grafisk. Vi talar om grafen til funksjonen

31 Aug 2004

© Erling Berge

8

---

---

---

---

---

---

---

---

## Funksjonar (2)

- Funksjonen  $f_1(x)$ : til verdien  $x$  svarar utfallet  $f_1(x)$   
 $x$  : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : ...  
 $f_1(x)$  : 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12 : 14 : ...
- Funksjonen  $f_2(x)$  til verdien  $x$  svarar utfallet  $f_2(x)$   
 $x$  : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : ...  
 $f_2(x)$  : 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : 36 : 49 : ...
  
- Lag grafar for funksjonane  $f_1$  og  $f_2$

31 Aug 2004

© Erling Berge

9

---

---

---

---

---

---

---

---

## Om konvensjonar for symbolbruk

- Konvensjonell symbolbruk varierer frå fag til fag og frå miljø til miljø
- Ofte vil ein skilje symbolbruken for ulike typar storleikar, vanlegvis:
  - "bokstaval", parametrar, konstantar: a, b, c, d, e, p, q, r, s, t, ... , og tilsvarande i greske bokstavar
  - variablar vil som regel nytte symbola x, y, z, ...
  - indeksar for variablar nyttar gjerne i, j, k, m, n
  - funksjonar vil ofte bli gitt symbola f(), g(), ...
- Det løner seg som regel å vere eksplisitt i definisjonen av kva symbola tyder

31 Aug 2004

© Erling Berge

10

---

---

---

---

---

---

---

---

## Likningar (1)

- Likningar får vi når vi veit eller kan argumentere for at to algebraiske uttrykk, eller to funksjonar, eller ein funksjon og eit algebraisk uttrykk er like
  - t.d.  $y = f(x)$
  - eller  $y = a + b \cdot x$  (likninga for ei linje)
  - eller  $0 = a + b \cdot x + c \cdot x^2$  (andegradslikninga)
  - eller  $y_i = b_0 + b_1 \cdot x_{i1} + b_2 \cdot x_{i2} + e_i$  (likninga for bivariat regresjon)

31 Aug 2004

© Erling Berge

11

---

---

---

---

---

---

---

---

## Likningar (2)

- Likningar som inneheld ukjente storleikar kan vere til hjelp i å finne kva dei ukjente storleikane er, anten eksakt eller tilnærma
- Løysinga kan vere algebraisk
  - $0 = a + b \cdot x \Rightarrow x = -a/b$
- Løysinga kan vere grafisk
  - t.d. finn x-verdiane som svarar til  $y=0$  i grafen til  $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$
- Løysinga kan vere numerisk

31 Aug 2004

© Erling Berge

12

---

---

---

---

---

---

---

---

## Likningar (3)

Rekning i likningar

- I likninga  $y=f(x)$  kan vi
  - Addere eller subtrahere same tal på begge sider av likskapsteiknet
    - Dvs.  $y+a=f(x)+a$  eller  $y-a=f(x)-a$
  - Multiplisere eller dividere med same tal på begge sider av likskapsteiknet
    - Dvs.  $Y*a=f(x)*a$  eller  $y/a=f(x)/a$
- Dette gjer vi for å finne algebraiske uttrykk der vi har ein avhengig ukjent på venstre sida og enten berre kjente storleikar eller uavhengige variablar og kjente storleikar på høgre sida. Dette vil som regel lette drøftinga av samanhengen mellom uavhengige og avhengig variabel

31 Aug 2004

© Erling Berge

13

---

---

---

---

---

---

---

---

## Matematiske operatorar

- Summasjon:  $\Sigma$   
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \Sigma_i a_i$   
(=  $\sum_{i=1}^n a_i$  dersom ikkje anna er sagt)
- Multiplikasjon:  $\Pi$   
 $a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * \dots * a_n = \Pi_i a_i$   
(=  $\prod_{i=1}^n a_i$  dersom ikkje anna er sagt)
- Eksponentiering:  $\exp\{a\}$   
 $Y = \exp\{x\}$  tyder at talet "e" skal opphøgjast i potensen x (eller eksponenten x)  
Talet  $e=2.71828$  er eit viktig tal (slik som  $\pi = 3.14$ )

31 Aug 2004

© Erling Berge

14

---

---

---

---

---

---

---

---

## Regresjonslikningar

- Bivariat  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \varepsilon_i$ 
  - Tolk symbolbruken
- Multipl regresjon med n uavhengige var
  - $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_n x_{ni} + \varepsilon_i$
  - $y_i = \beta_0 + \Sigma_k (\beta_k x_{ki}) + \varepsilon_i$
- Logistisk regresjon er basert på funksjonen
  - $y_i = \alpha / (1 + \gamma * \exp\{-\beta x_i\}) + \varepsilon_i$  med  $\alpha=1$  og  $\gamma=1$  for å kunne tolke y som estimat av eit sannsyn (oftast skrive som  $\hat{p}_i$  med "hatt" over)

31 Aug 2004

© Erling Berge

15

---

---

---

---

---

---

---

---

## Logaritmar

- Logaritmar har grunntal
  - Vanlegvis er grunntalet "10" eller "e"
  - Logaritmar med grunntalet "10" vert kalla Briggske logaritmar
  - Grunntalet "e" gir naturlege logaritmar
- Logaritmen til talet "a" er eksponenten (eller potensen) grunntalet må opphøgjast i for å få talet "a". Dvs.

$$a = 10^{\log_{10}(a)} \quad (a = 10^{\log(a)})$$

$$a = e^{\ln(a)} = \exp\{\ln(a)\}$$

31 Aug 2004

© Erling Berge

16

---

---

---

---

---

---

---

---

## Reknereglar for logaritmar

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$
- $\ln(a^{-n}) = (-n) \cdot \ln(a)$
- $\ln(a^{1/n}) = (1/n) \cdot \ln(a)$

31 Aug 2004

© Erling Berge

17

---

---

---

---

---

---

---

---

## Logaritmar og logistisk regresjon

- Logistisk regresjon med n uavhengige variablar er basert på funksjonen

$$y_i = 1 / (1 + \exp\{-(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_n x_{ni})\}) + \varepsilon_i$$

- Logiten er definert som

$$L_i = -(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_n x_{ni})$$

slik at

$$y_i = 1 / (1 + \exp\{-L_i\}) + \varepsilon_i$$

- Vi ser at logiten er ein sum av eksponentar for grunntalet e
- Uttrykket  $O_i = \exp\{L_i\}$  vert her kalla Oddsen

31 Aug 2004

© Erling Berge

18

---

---

---

---

---

---

---

---

# Variablar

## Matematikarar

- Kontinuerlege (gradvis og jamn vekst/minke i verdiane)
- Diskrete (kan alltid omformast til verdiane 1,2,... )
- Binære (tar verdiane 0 eller 1)

## Samfunnsvitarar

- Variablar med måleskala (kroner, kilo, år, etc)
- Variablar med rangeringar
- Klassifikasjonar (sosialklasse, yrke, etc), inklusive Dikotomiar (kjønn, regjeringsmakt, etc)

---

---

---

---

---

---

---

---